UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTHAN THAHA SAIFUDDIN JAMBI

Terbit online pada laman web jurnal: http://jemst.ftk.uinjambi.ac.id/

Jurnal Of Education in Mathematics, Science, and Technology

ISSN: E-ISSN: 2614-1507

JEMST

# *TRACE* MATRIKS CENTROSYMMETRIC ORDO $4 \times 4$ BENTUK KHUSUS BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF

**Dinda Putri Kautsarani[1], Surya Nengsih[2], Rahmawati[3*], Rahmadeni[4]**

[1,2,3,4] *Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau, Jl. H.R. Soebrantas No. 155, KM. 15, Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293, Indonesia*

*Diterima:11 Desember 2025, Disetujui: 26 Desember 2025, Dipublikasikan: 28 Desember 2025*

***) Korespondensi:** rahmawati@uin-suska.ac.id

**ABSTRAK**

Penelitian ini membahas bentuk umum *trace* dari matriks *centrosymmetric* bentuk khusus ordo 4 x 4 yang menjadi objek kajian. Matriks *centrosymmetric* memiliki struktur simetri pusat yang menyebabkan elemen-elemennya mengikuti pola rekursif tertentu ketika dipangkatkan. Untuk menemukan bentuk umum *trace* matriks tersebut, dilakukan perpangkatan matriks untuk $1 \leq m \leq 10$ dan dianalisis pola yang muncul pada elemen diagonal utamanya. Berdasarkan pola rekursif yang diperoleh, ditetapkan dugaan bentuk umum *trace* matriks *centrosymmetric* berpangkat $m$. Selanjutnya, kebenaran bentuk umum tersebut dibuktikan menggunakan metode induksi matematika. Hasil penelitian menunjukkan bahwa *trace* matriks *centrosymmetric* bentuk khusus ordo 4 x 4 berpangkat bilangan bulat positif memiliki pola yang teratur dan dapat dinyatakan dalam bentuk umum yang berlaku untuk semua bilangan bulat positif $m$. Temuan ini memberikan kontribusi dalam kajian matriks berpola khusus serta mempermudah perhitungan *trace* pada matriks *centrosymmetric* berordo besar.

**Kata Kunci:** *matriks centrosymmetric , trace matriks, perpangkatan matriks, induksi matematika*

**ABSTRACT**

*This study discusses the general form of the trace of a centrosymmetric matrix, specifically the special case of order 4×4, which is the object of investigation.Centrosymmetric matrices possess a central symmetry structure that causes their elements to follow specific recursive patterns when the matrix is raised to positive integer powers. To identify the general form of the trace, the matrix was exponentiated for* $1 \leq m \leq 10$ *and the patterns appearing in the main diagonal elements were analyzed. Based on the observed recursive structure, a conjecture for the general trace of the matrix raised to the m-th power was formulated. The validity of this conjecture was then proven using mathematical induction. The results show that the trace of a special-form* *centrosymmetric matrix of order 4×4 raised to a positive integer power exhibits a regular pattern and can be expressed in a general form that holds for all positive integers $m$. These findings contribute to the study of structured matrices and facilitate the computation of traces for higher-order centrosymmetric matrices.*

**Keywords:** *Centrosymmetric Matrix, Trace of Matrix, Matrix Exponentiation, Mathematical Induction.*

## 1. PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

*Trace* matriks merupakan hasil penjumlahan dari seluruh elemen yang terletak pada diagonal utama dari suaru matriks bujursangkar (Aryani et al., 2021) . Dalam aljabar linear dikenal berbagai jenis matriks, salah satunya yang memiliki pola khusus adalah matriks *centrosymmetric*. Matriks *centrosymmetric* merupakan salah satu jenis matriks yang memiliki pola simetri terhadap pusat matriks(Rahma & Aqilah, 2021). Suatu matriks bujursangkar $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n} \in R^{n\times n}$ dikatakan *centrosymmetric* apabila setiap elemennya memenuhi hubungan $a_{ij} = a_{n-i+1,n-j+1}$ untuk $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n$. Matriks tersebut dapat direpresentasikan dalam bentuk sebagai berikut:

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Penelitian mengenai *trace* matriks *centrosymmetric* penting dilakukan karena matriks ini memiliki struktur simetri pusat yang membedakannya dari jenis matriks lainnya. Sifat simetri tersebut membuat setiap elemen memiliki pasangan yang identik pada posisi yang berlawanan terhadap pusat matriks (Khasana, 2015). Keunikan pola ini memberikan karakteristik khusus pada nilai *trace* ketika matriks tersebut dipangkatkan dengan bilangan bulat positif, sehingga menarik untuk dikaji lebih lanjut.

Beberapa penelitian terdahulu juga telah membahas topik terkait *trace* dan matriks berpola khusus. Berdasarkan penelitian (Rahmawati et al., 2021) membahas bentuk umum *trace* dari pangkat bilangan bulat positif pada *special matrix*, yaitu matriks berordo $n \times n$ dengan setiap baris memiliki nilai elemen yang sama. Melalui proses perpangkatan matriks untuk berbagai nilai $m$ dan pengamatan pola rekursifnya, penelitian tersebut berhasil menemukan bentuk umum perpangkatan matriks serta *trace*-nya. Hasil utamanya menunjukkan bahwa pangkat ke–$m$ dari matriks tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$(A_n)^m = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{m-1} A_n$$

Sedangkan *trace* matriksnya memiliki bentuk umum:

$$Tr(A_n^m) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{m}$$

Pembuktian dilakukan menggunakan metode induksi matematika dan pembuktian langsung untuk memastikan konsistensi pola tersebut pada berbagai ordo matriks. Temuan ini berkontribusi penting dalam pengembangan teori *trace* pada matriks berpola khusus dan menjadi rujukan kuat dalam penelitian yang berkaitan dengan struktur matriks simetri atau matriks berpola khusus lainnya.

Berdasarkan penelitian(Qori'ah, 2024) hasil penelitiannya menunjukkan bahwa matriks *centrosymmetric* berbentuk khusus yang digunakan, yaitu

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & a \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & 0 \\ a & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

Penelitian ini berhasil menemukan pola umum bentuk $A_n^m$ serta menentukan sifat-sifat lanjutannya, termasuk bentuk umum *trace* matriks berpangkat, yaitu $tr(A_n^m) = a^m[2^m + (n-2)]$. Secara keseluruhan, hasil penelitian menunjukkan bahwa struktur khusus matriks ini menghasilkan pola perpangkatan dan nilai *trace* yang teratur, sehingga mempermudah analisis dan perhitungan pada matriks *centrosymmetric* berordo besar.

Berdasarkan penelitian (Sari, 2023) membahas mengenai *trace* dari perpangkatan matriks khusus berordo $(n+1)$menunjukkan bahwa matriks tersebut menghasilkan pola elemen yang terstruktur ketika dipangkatkan. Hasil perpangkatan matriks memperlihatkan bahwa elemen-elemen diagonal utama mengikuti dua pola berbeda, yaitu elemen pada indeks genap dan indeks ganjil. Pola ini menghasilkan bentuk umum matriks berpangkat:

$$(A_{n+1})^m = [a_{i,j}] = \begin{cases} \left(\frac{n}{2}+1\right)^{m-1} a^m \ \ untuk\ i,j = 0,2,\dots,n, \\ \left(\frac{n}{2}\right)^{m-1} a^m \ \ untuk\ i,j = 1,3,\dots,n-1, \\ 0 \qquad\qquad untuk\ elemen\ lainnya. \end{cases}$$

Dari bentuk umum tersebut, diperoleh bahwa *trace* matriks berpangkat ke-$m$ adalah:

$$Tr\big((A_{n+1})\big)^m = \left[\left(\frac{n}{2}+1\right)a\right]^m + \left[\left(\frac{n}{2}\right)a\right]^m$$

Kesimpulan ini menunjukkan bahwa *trace* matriks khusus tersebut dapat dinyatakan secara eksplisit dan hanya bergantung pada dua kelompok indeks diagonal (genap dan ganjil), sehingga mempermudah analisis perpangkatan matriks berordo besar dan mempertegas keteraturan struktur matriks tersebut. Selanjutnya, penelitian(Rahmatullah, 2024) membahas tentang *trace* matriks *centrosymmetric* bentuk khusus ordo $n \times n$ berpangkat bilangan bulat positif, dihasilkan bentuk umum *trace* matriks *centrosymmetric* yaitu:

$$Tr(A_n^m) = \begin{cases} 3a^m \ \text{ untuk } n \text{ ganjil dan m genap,} \\ 2a^m \ \text{ untuk } n \text{ ganjil dan m genap,} \\ na^m \qquad\qquad \text{ untuk } m \text{ genap.} \end{cases}$$

Penelitian(A. Novia Rahma, 2020) juga membahas mengenai determinan dari matriks *centrosymmetric* ordo $3 \times 3$ dengan bentuk khusus dari matriksnya dapat dilihat berikut ini:

$$A_3 = \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & a & a \end{bmatrix}$$

Hasil penenlitian menunjukkan bahwa diperoleh bentuk umum determinannya sebagai berikut:

$$|A_3^n| = A^{3n}.$$

Selanjutnya penelitian(A. N. Rahma, E. Erizona, 2021) membahas mengenai determinan matriks *centrisymmetric* ordo $4 \times 4$ dengan bentuk khusus dari matriksnya dapat dilihat berikut ini:

$$A_4 = \begin{bmatrix} a & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & a \end{bmatrix}$$

Hasil penenlitian menunjukkan bahwa diperoleh bentuk umum determinannya sebagai berikut:

$$|A_4^n| = A^{4n}.$$

Penelitian-penelitian terdahulu menunjukkan bahwa matriks berpola khusus, termasuk matriks *centrosymmetric*, memiliki keteraturan struktur yang menghasilkan pola tertentu pada hasil perpangkatan dan nilai *trace*-nya. Namun, kajian mengenai bentuk umum *trace* matriks *centrosymmetric* ordo $n \times n$ dengan bentuk khusus berpangkat bilangan bulat positif masih terbatas. Oleh karena itu, penelitian ini bertujuan untuk menentukan dan membuktikan bentuk umum *trace* matriks *centrosymmetric* bentuk khusus ordo $4\,x\,4$ melalui pengamatan pola rekursif hasil perpangkatan dan pembuktian menggunakan induksi matematika. Kebaruan penelitian ini terletak pada penyajian bentuk umum *trace* untuk bentuk khusus ordo $4\,x\,4$ secara sistematis, sehingga mempermudah perhitungan dan analisis *trace* pada matriks berordo besar.Penelitian ini spesifik memilih matriks *centrosymmetric* ordo $4 \times 4$ karena sifat simetri dari matriks tersebut menghasilkan pola rekursif yang konsisten pada elemen-elemen matriks ketika dipangkatkan dengan bilangan bulat positif $m$. Matriks *centrosymmetric* bentuk khusus ordo $4\,x\,4$ yang menjadi objek penelitian didefinisikan sebagai berikut:

$$A_4 = \begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & a & 0 \\ 0 & a & a & 0 \\ 0 & b & 0 & a \end{bmatrix} \tag{2}$$

Untuk menentukan nilai *trace* dari suatu matriks berpangkat, terlebih dahulu matriks tersebut dipangkatkan sesuai dengan pangkat yang diinginkan. Setelah matriks berpangkat terbentuk, nilai *trace*-nya dihitung dengan menerapkan definisi *trace*, yaitu menjumlahkan seluruh elemen yang terletak pada diagonal utamanya.

## 2. METODE DAN BAHAN PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan dengan menggunakan pendekatan studi pustaka (*literature review*) berdasarkan teori-teori dalam bidang matriks seperti menentukan *trace* matriks *centrosymmetric* menggunakan induksi matematika dan definisi matriks**.** Dalam penelitian ini, untuk mendapatkan bentuk umum *trace* matriks *centrosymmetric* bentuk khusus ordo 4 x 4 akan diberikan Langkah-langkah sebagai berikut:

1. Diberikan matriks *centrosymmetric* pada Persamaan (2).
2. Melakukan perpangkatan matriks *centrosymmetric* $A_4^m$ matriks dengan $1 \le m \le 10$.
3. Menduga bentuk umum dari *tr* $(A_4^m)$ dengan memperhatikan pola rekursifnya.
4. Membuktikan bentuk umum *tr* $(A_4^m)$ menggunakan induksi matematika
5. Mengaplikasikan $tr(A_4^m)$ yang diperoleh ke dalam contoh soal.

Berikut ini dijelaskan teori-teori pendukung dalam penelitian ini dalam bentuk definisi, contoh, dan teorema-teorema terkait.

**Definisi 2.1** (Rahma & Aqilah, 2021) Matriks *centrosymmetric* merupakan salah satu matriks yang memiliki struktur simetri pada pertengahan matriks. Matriks *centrosymmetric* juga mempunyai keunikan dalam elemen-elemen matriksnya.
Diberikan $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n} \in R^{n\times n}$ adalah matriks *centrosymmetric,* jika $a_{ij} = a_{n-i+1,n-j+1}$, $1 \le i \le n, 1 \le j \le n$ atau dapat ditulis

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2n} & \cdots & a_{22} & a_{21} \\ a_{1n} & \cdots & a_{12} & a_{11} \end{bmatrix} \tag{3}$$

**Contoh 2.1**
Diberikan $A \in R^{4\times 4}$ adalah matriks *centrosymmetric* bentuk khusus, tuliskan hubungan elemen-elemen A berdasarkan Definisi matriks *centrosymmetric*.

$A_4 = \begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & a & 0 \\ 0 & a & a & 0 \\ 0 & b & 0 & a \end{bmatrix}$ Penyelesaian:

Sebuah matriks A disebut *centrosymmetric* jika elemen-elemen A memenuhi hubungan:

$$a_{ij} = a_{n-i+1,n-j+1}$$

Dengan $n = 4$, hubungan elemen-elemen matriks $A$ adalah:
$a_{11} = a = a_{4-1+1,4-1+1} = a_{44}$
$a_{12} = 0 = a_{4-1+1,4-2+1} = a_{43}$
$a_{13} = b = a_{4-1+1,4-3+1} = a_{42}$
$a_{14} = 0 = a_{4-1+1,4-4+1} = a_{41}$
$\vdots$
$a_{44} = a = a_{4-4+1,4-4+1} = a_{11}$.

Misalkan $S$ merupakan matriks $n \times n$, matriks $S$ disebut matriks *centrosymmetric*, jika memenuhi $S^R = S$ dan $S^R$ didefinisikan dengan $S^R = J_n S J_n$ dengan $S^R$ adalah rotasi matriks dari $S$ dan $J_n$ adalah matriks contra-identitas yang dapat ditulis sebagai berikut(Novia Rahma, A. Husnudzon Vitho, R. Safitri, n.d.):

$$J_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dijelaskan mengenai perpangkatan matriks pada Definisi 2.2 berikut.

**Definisi 2.2**(Marzuki et al., 2021) Jika $A$ adalah matriks bujursangkar, maka definisi dari pangkat integer tak negatif dari $A$ adalah

$$A^0 = I, A^m = AA \dots A (m > 0), dimana\ A\ adalah\ m\ faktor$$

Selanjutnya, jika $A$ invertible, maka pangkat integer negatif dari $A$ adalah

$$A^{-m} = (A^{-1})^m = A^{-1}A^{-1} \dots A^{-1}$$

**Contoh 2.2**

Akan ditentukan kuadrat dari Matriks $A_3$ sebagai berikut

$$A_3^2 = \begin{bmatrix} 0 & b & b \\ -b & b & b \\ -b & 0 & b \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & b & b \\ -b & b & b \\ -b & 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2b^2 & b^2 & 2b^2 \\ -2b^2 & 0 & b^2 \\ -b^2 & -b^2 & 0 \end{bmatrix}$$

Pada bagian ini tertera Definisi, Teorema serta contoh yang menjelaskan tentang *trace.*

**Definisi 2.3**(Gentle J. E., 2007)**.** Misalkan $A = \{a_{ij}\}$ suatu matriks persegi berukuran $n \times n$, maka *trace* dari $A$ didefinisikan sebagai jumlah dari elemen diagonal $A$ dan dinotasikan $tr(A)$, yaitu $tr(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$.

**Teorema 2.1** (H. Anton and C. Rorres, 2004) Apabila diberikan sebuah matriks persegi *A* dan *B* yang memiliki ordo yang serupa dan c merupakan sebuah konstanta maka berlaku:

*a)* $tr(A) = tr(A^T)$
*b)* $tr(cA) = c\, tr(A)$
*c)* $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$
*d)* $tr(AB) = tr(BA)$

**Contoh 2.3**

Diberikan matriks $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, tentukanlah $tr(A_3)$, dan $tr(A_3{}^2)$!

Penyelesaian:

$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, maka diperoleh

$tr(A_3) = 1 + 1 + 4 = 6$

$A_3^2 = A_3\, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 10 & 19 \\ 12 & 11 & 19 \\ 21 & 16 & 29 \end{bmatrix}$, maka diperoleh

$tr(A_3^2) = 16 + 11 + 29 = 56$

Selanjutnya akan dijelaskan mengenai induksi matematika pada Definisi 2.4.

**Definisi 2.4** (R. Munir, 2010)**.** Misalkan $p(n)$ adalah proposisi perihal bilangan bulat positif dan kita ingin membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif $n$. Untuk membuktikan proposisi ini, kita hanya perlu menunjukkan:

1. $p(1)$ benar,
2. Jika $p(n)$ benar, maka $p(n + 1)$ juga benar untuk setiap $n \geq 1$, sehingga $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif $n$.

## 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam penelitian ini, untuk menentukan bentuk umum dari *trace* matriks *centrosymmetric*, maka terlebih dahulu dilakukan perpangkatan matriks *centrosymmetric* bentuk khusus Pada Persamaan (2) yakni $A_4$ dengan pangkat $1 \leq m \leq 10, m \in Z^+$. Selanjutnya dilakukan perhitungan nilai *trace* setiap hasil perpangkatan untuk menemukan bentuk umum *trace* matriks *centrosymmetric* tersebut.

Jika $m = 1$, maka $A_4^1 = \begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & a & 0 \\ 0 & a & a & 0 \\ 0 & b & 0 & a \end{bmatrix}$, dengan

$$tr(A_4^1) = a + a + a + a = 4a. \quad (4)$$

Jika $m = 2$, maka $A_4^2 = \begin{bmatrix} a^2 & ab & 2ab & 0 \\ 0 & 2a^2 & 2a^2 & 0 \\ 0 & 2a^2 & 2a^2 & 0 \\ 0 & 2ab & 2ab & a^2 \end{bmatrix}$, dengan

$$tr(A_4^2) = a^2 + 2a^2 + 2a^2 + a^2 = 6a^2. \quad (5)$$

Jika $m = 3$, maka $A_4^3 = \begin{bmatrix} a^3 & 3a^2b & 4a^2b & 0 \\ 0 & 4a^3 & 4a^3 & 0 \\ 0 & 4a^3 & 4a^3 & 0 \\ 0 & 4a^2b & 3a^2b & a^3 \end{bmatrix}$, dengan

$$tr(A_4^3) = a^3 + 4a^3 + 4a^4 + a^3 = 10a^3. \quad (6)$$

Jika $m = 4$, maka $A_4^4 = \begin{bmatrix} a^4 & 7a^3b & 8a^3b & 0 \\ 0 & 8a^4 & 8a^4 & 0 \\ 0 & 8a^4 & 8a^4 & 0 \\ 0 & 8a^3b & 7a^3b & a^4 \end{bmatrix}$, dengan

$$tr(A_4^4) = a^4 + 8a^4 + 8a^4 + a^4 = 18a^4. \quad (7)$$

Jika $m = 5$, maka $A_4^5 = \begin{bmatrix} a^5 & 15a^4b & 16a^4b & 0 \\ 0 & 16a^5 & 16a^5 & 0 \\ 0 & 16a^5 & 16a^5 & 0 \\ 0 & 16a^4b & 15a^4b & a^5 \end{bmatrix}$, dengan

$$tr(A_4^5) = a^5 + 16a^5 + 16a^5 + a^5 = 34a^5. \quad (8)$$

Jika $m = 6$, maka $A_4^6 = \begin{bmatrix} a^6 & 31a^5b & 32a^5b & 0 \\ 0 & 32a^6 & 32a^6 & 0 \\ 0 & 32a^6 & 32a^6 & 0 \\ 0 & 32a^5b & 31a^5b & a^6 \end{bmatrix}$, dengan

$$tr(A_4^6) = a^6 + 32a^6 + 32a^6 + a^6 = 66a^6. \quad (9)$$

Jika $m = 7$, maka $A_4^7 = \begin{bmatrix} a^7 & 63a^6b & 64a^6b & 0 \\ 0 & 64a^7 & 64a^7 & 0 \\ 0 & 64a^7 & 64a^7 & 0 \\ 0 & 64a^6b & 63a^6b & a^7 \end{bmatrix}$, dengan

$$tr(A_4^7) = a^7 + 64a^7 + 64a^7 + a^7 = 130a^7. \quad (10)$$

Jika $m = 8$, maka $A_4^8 = \begin{bmatrix} a^8 & 127a^7b & 128a^7b & 0 \\ 0 & 128a^8 & 128a^8 & 0 \\ 0 & 128a^8 & 128a^8 & 0 \\ 0 & 128a^7b & 127a^7b & a^8 \end{bmatrix}$, dengan

$$tr(A_4^8) = a^8 + 128a^8 + 128a^8 + a^8 = 258a^8. \quad (11)$$

Jika $m = 9$, maka $A_4^9 = \begin{bmatrix} a^9 & 255a^8b & 256a^8b & 0 \\ 0 & 256a^9 & 256a^9 & 0 \\ 0 & 256a^9 & 256a^9 & 0 \\ 0 & 256a^8b & 255a^8b & a^9 \end{bmatrix}$, dengan

$$tr(A_4^9) = a^9 + 256a^9 + 256a^9 + a^9 = 514a^9. \quad (12)$$

Jika $m = 10$, maka $A_4^{10} = \begin{bmatrix} a^{10} & 511a^9b & 512a^9b & 0 \\ 0 & 512a^{10} & 512a^{10} & 0 \\ 0 & 512a^{10} & 512a^{10} & 0 \\ 0 & 512a^9b & 511a^9b & a^{10} \end{bmatrix}$, dengan

$$tr(A_4^{10}) = a^{10} + 512a^{10} + 512a^{10} + a^{10} = 1026a^{10}. \quad (13)$$

Berdasarkan hasil perpangkatan matriks *centrosymmetric* $A_4^m$ dengan $1 \leq m \leq 10$, dapat diamati bahwa setiap elemen pada matriks hasil perpangkatan menunjukkan pola yang berulang (rekursif)**.** Berdasarkan Persamaan (4) -(12) dapat dilakukan dengan analisis sebagai berikut:

$tr(A_4^1) = 4a = (2^1 + 2)a^1$
$tr(A_4^2) = 6a^2 = (2^2 + 2)a^2$
$tr(A_4^3) = 10a^3 = (2^3 + 2)a^3$
$tr(A_4^4) = 18a^4 = (2^4 + 2)a^4$
$tr(A_4^5) = 34a^5 = (2^5 + 2)a^5$
$tr(A_4^6) = 66a^6 = (2^6 + 2)a^6$
$tr(A_4^7) = 130a^7 = (2^7 + 2)a^7$
$tr(A_4^8) = 258a^8 = (2^8 + 2)a^8$
$tr(A_4^9) = 514a^9 = (2^9 + 2)a^9$
$\mathrm{T}r(A_4^{10}) = 1026a^{10} = (2^{10} + 2)a^{10}$

dengan memperhatikan pola rekursif tersebut, sehingga diduga bentuk umum *trace* matriks *centrosymmetric* $A_4^m$ adalah

$$tr(A_4^m) = (2^m + 2)a^m.$$

Setelah diperoleh dugaan bentuk umum *trace* matriks *centrosymmetric*, selanjutnya akan dibuktikan kebenaran bentuk umum tersebut melalui induksi matematika, sebagaimana ditunjukkan pada Teorema berikut.

**Teorema 3.1** Jika diberikan $A_4 = \begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & a & 0 \\ 0 & a & a & 0 \\ 0 & b & b & a \end{bmatrix} \forall a, b \in \mathbb{Z}^+$. Maka

$$tr({A_4}^m) = (2^m + 2)a^m \ \ \forall a \in \mathbb{Z}^+.$$

**Bukti.**

Pembuktian Teorema ini dilakukan dengan menggunakan induksi matematika. Misalkan bahwa :

$$P(m): tr({A_4}^m) = (2^m + 2)a^m$$

Untuk $m = 1$

$$P(1): tr\left({A_4}^1\right) = (2^1 + 2)a^1 = 4a$$

Hal ini sesuai berdasarkan perhitungan *trace* matriks sebelumnya $tr\left({A_4}^1\right) = 4a$ pada Persamaan (4). Jadi $P(1)$benar**.**

Asumsikan proposisi benar untuk $k$:

$tr(A^m) = C_m \,.\, a^m$ dengan $C_m = (2^m + 2)$

Akan ditunjukkan bahwa $P(m+1)$: $tr\left({A_4}^{m+1}\right) = (2^{m+1} + 2)a^{m+1}$ juga benar

Hal ini dibuktikan dengan menunjukkan hubungan Rekursif Koefisien

Akan ditunjukkan bahwa rumus $C_{m+1}$ dapat diturunkan dari $C_m$ melalui hubungan perbedaan yang teramati:

$$C_{m+1} = (C_m + 2^m)$$

Pembuktian $C_m \Rightarrow C_{m+1}$

$$\begin{aligned} C_{m+1} &= C_m + 2^m \\ &= (2^m + 2) + 2^m \text{ (subtitusi asumsi } C_m\text{)} \\ &= 2.\,2^m + 2 \\ &= 2^{m+1} + 2. \end{aligned}$$

Karena $C_{m+1}$ yang diperoleh sama dengan $2^{m+1} + 2$, maka $tr\left({A_4}^{m+1}\right) = (2^{m+1} + 2)a^{m+1}$. Dengan demikian, $P(m+1)$ benar.

Hasil yang diperoleh dalam penelitian ini memberikan beberapa manfaat penting dalam kajian aljabar linear, khususnya pada studi matriks berpola khusus. Dengan ditemukannya bentuk umum *trace* matriks centrosymmetric ordo nnn berpangkat bilangan bulat positif, proses perhitungan *trace* menjadi lebih sederhana karena tidak lagi memerlukan perpangkatan matriks secara langsung untuk setiap nilai pangkat. Hal ini sangat bermanfaat terutama pada matriks berordo besar, di mana perhitungan manual maupun komputasi numerik dapat menjadi kompleks dan tidak efisien.

Di sisi lain, bentuk umum *trace* yang diperoleh memperjelas keterkaitan antara struktur simetri pusat matriks centrosymmetric dengan pola rekursif yang muncul pada hasil perpangkatan matriks. Pemahaman ini dapat menjadi dasar bagi pengembangan kajian lanjutan, seperti analisis sifat spektral matriks, keterkaitan *trace* dengan determinan, serta aplikasi pada permasalahan matematika terapan yang melibatkan matriks berpola khusus. Dengan demikian, hasil penelitian ini tidak hanya bersifat teoretis, tetapi juga berpotensi mendukung penelitian selanjutnya dalam bidang matriks dan aplikasinya.

**Contoh 3.1.** Diberikan matriks *centrosymmetric* bentuk khusus

$$A_4 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Tentukan $tr\left({A_4}^{12}\right)$.

Berdasarkan Teorema 3.1 diketahui bahwa $m = 12$ dan $a = 5$ maka trace dari matriks tersebut adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} tr({A_4}^{m}) &= (2^m + 2)a^m \\ tr\left({A_4}^{12}\right) &= (2^{12} + 2)5^{12} \\ &= 1.000.488.281.250. \end{aligned}$$

## 4. KESIMPULAN

Penelitian ini mengkaji *trace* matriks *centrosymmetric* khusus yang direpresentasikan pada Persamaan (2) yaitu: $A_4 = \begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & a & 0 \\ 0 & a & a & 0 \\ 0 & b & b & a \end{bmatrix}$ dan berpangkat bilangan bulat positif $m$. Melalui proses perpangkatan matriks untuk $1 \leq m \leq 10$, diperoleh pola rekursif yang konsisten pada elemen-elemen diagonal utama matriks hasil perpangkatan. Pola ini memungkinkan penarikan dugaan bentuk umum *trace* matriks tersebut. Berdasarkan hasil analisis dan perhitungan, ditetapkan bahwa bentuk umum *trace* matriks *centrosymmetric* $A_4^m$ adalah:

$$\mathrm{tr}(A_4^m) = (2^m + 2)a^m.$$

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa struktur simetri pusat pada matriks *centrosymmetric* menyebabkan terbentuknya pola perpangkatan dan *trace* yang teratur, sehingga mempermudah analisis pada matriks berordo besar dan memberikan kontribusi signifikan terhadap kajian matriks berpola khusus.

## DAFTAR PUSTAKA

A. N. Rahma, E. Erizona, dan R. (2021). Determinan Matriks Centrosymmetric Bentuk Khusus Ordo 4×4 Berpangkat Bilangan Bulat Positif. *Jurnal of Fundamental Mathematics and Applications(JFMA)*, *4*.

A. Novia Rahma, S. M. J. dan R. (2020). Determinan Matriks Centrosymmetric Bentuk Khusus Ordo 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif Dengan Kofaktor. *Jurnal Sains Matematika Dan Statistika*, *6*.

Aryani, F., Bayu Cenia, F., Muda, Y., & Zukrianto. (2021). Trace Matriks Simetris Berbentuk Khusus Orde 3 Berpangkat Bilangan Bulat. *Seminar Nasional Teknologi Informasi, Komunikasi Dan Industri (SNTIKI) 13*, *November*, 300–310.

Gentle J. E. (2007). *Matrix Algebra* (Springer (ed.)).

H. Anton and C. Rorres. (2004). *Aljabar Linear Elementer dan Aplikasi* (ke-delapan).

Khasana, N. dkk. (2015). *Analisis Konvergensi dari Komputasi Invers Matriks Centrosymmetric*.

Marzuki, C. C., Aryani, F., & Rahmawati, R. (2021). Trace Matriks n×n Berbentuk Khusus Berpangkat Bilangan Bulat Positif. *Jurnal Sains Matematika Dan Statistika*, *7*(1), 28. https://doi.org/10.24014/jsms.v7i1.11561

Novia Rahma, A. Husnudzon Vitho, R. Safitri, E. (n.d.). Invers Matriks Centrosymmetric Bentuk Khusus Ordo Menggunakan Adjoin. *2023*, *4*.

Qori'ah, A. (2024). *Trace Matriks Centrosymmetric Bentuk Khusus Ordo n × n Berpangkat Bilangan Bulat Positif*. 69.

R. Munir. (2010). *Matematika Diskrit*.

Rahma, A. N., & Aqilah, Z. (2021). Determinan Matriks Centrosymmetric Bentuk Khusus Ordo 4×4 Berpangkat Bilangan Bulat Positif. *Jurnal Sains Matematika Dan Statistika*, *7*(1), 96. https://doi.org/10.24014/jsms.v7i1.12193

Rahmatullah, R. (2024). Trace Matriks Centrosymetric Bentuk Khusus Ordo n × n Berpangkat Bilangan Bulat Positif. *UIN SUSKA RIAU*.

Rahmawati, R., Citra, A., Aryani, F., Marzuki, C. C., & Muda, Y. (2021). Trace of Positive Integer Power of Squared Special Matrix. *CAUCHY: Jurnal Matematika Murni Dan Aplikasi*, *6*(4), 200–211. https://doi.org/10.18860/ca.v6i4.10312

Sari, D. E. (2023). *Trace Matriks Hankel Bentuk Khusus BerordoGanjil Berpangkat Bilangan Bulat Positif*. 1–35.