UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
SULTHAN THAHA SAIFUDDIN
JAMBI

Terbit online pada laman web jurnal: http://jemst.ftk.uinjambi.ac.id/
Jurnal Of Education in Mathematics, Science, and Technology
ISSN: E-ISSN: 2614-1507

JEMST

DETERMINAN MATRIKS CENTROSYMMETRIC BENTUK KHUSUS ORDO 4×4 BERPANGKAT BILANGAN POSITIF

Rahmawati[1*], Iffah Aisyah Rahmi [2], Ratih Triwahyuni [3], Yepri Prianda [4], Rahmadeni [5]

[1-5] *Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau, Jl. H.R. Soebrantas No. 155, KM. 15, Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293, Indonesia*

Diterima:11 Desember 2025, Disetujui: 26 Desember 2025, Dipublikasikan: 28 Desember 2025

Korespondensi: rahmawati@uin-suska.ac.id

ABSTRAK

Determinan matriks berpangkat memiliki manfaat penting dalam menjelaskan perilaku sistem yang mengalami proses berulang (iteratif). Dalam fenomena kehidupan nyata, banyak sistem tidak terjadi sekali, tetapi berulang dari waktu ke waktu, sehingga secara matematis dimodelkan dengan pangkat matriks. Dalam kehidupan nyata, determinan matriks bermanfaat dalam penentuan analisis system, pertumbuhan populasi, penyebaran informasi maupun perkembangan ekonomi dari waktu ke waktu. Penelitian ini mengkaji penentuan determinan matriks *Centrosymmetric* bentuk khusus ordo 4×4 yang dipangkatkan dengan bilangan bulat positif. Pola matriks hasil perpangkatan dianalisis untuk memperoleh bentuk umum matriks berpangkatnya, kemudian dibuktikan menggunakan induksi matematika. Selanjutnya, diperoleh bentuk umum determinan matriks berpangkatnya diperoleh menggunakan pembuktian langsung dengan ekspansi kofaktor. Penelitian ini memberikan bentuk umum matriks dan determinannya dan diaplikasikan pada contoh soal.

Kata Kunci: Matriks *Centrosymmetric*, Determinan, Perpangkatan Matriks, Induksi Matematika, pembuktian lansung.

ABSTRACT

The determinant of a powered matrix has important benefits in explaining the behavior of systems that undergo repeated (iterative) processes. In real-life phenomena, many systems do not occur only once but repeat over time; therefore, they are mathematically modeled using matrix powers. In real life, matrix determinants are useful for system analysis, population growth, the spread of information, and economic development over time. This study examines the determination of the determinant of a special-form 4×4 centrosymmetric matrix raised to a positive integer power. The pattern of the matrix resulting from exponentiation is analyzed to obtain the general form of the powered matrix, which is then proven using mathematical induction. Furthermore, the general form of the determinant of the powered matrix is derived through a direct proof using cofactor expansion. This study provides the general form of the matrix and its determinant and applies the results to example problems.

Keywords: Centrosymmetric Matrix, Determinant, Matrix Exponentiation, Mathematical Induction, Direct Proof.

1. PENDAHULUAN

Salah satu cabang penting dalam matematika adalah aljabar linear, yang membahas berbagai konsep dasar termasuk matriks. Matriks merupakan topik fundamental yang berperan besar dalam memahami struktur dan operasi aljabar (Rasmawati et al., 2021). Dalam konsep ini, terdapat beberapa jenis matriks yang memiliki sifat khas atau keistimewaan tertentu. Contohnya adalah matriks nol, yaitu matriks yang seluruh elemennya bernilai nol; matriks diagonal, yang hanya memiliki elemen tidak nol pada diagonal utamanya; matriks segitiga atas maupun segitiga bawah, yang masing-masing memiliki elemen bernilai nol di bawah atau di atas diagonal utama; serta matriks *centrosymmetric*, yang memiliki sifat simetri terhadap titik pusat matriksnya (Nadila, 2024).

Di tengah lanskap matriks yang telah diwarnai oleh sifat-sifat klasik, seperti adanya berbagai jenis matriks dengan berfokus pada diagonal dan struktur segitiga, matriks *centrosymmetric* muncul sebagai sebuah simetri yang mengundang renungan lebih dalam. Penelitian ini menjadi penting untuk menyelami potensi tersembunyi dari simetri pusat tersebut, tidak hanya dalam memperkaya katalog sifat matriks, tetapi juga dalam membangun dialog baru antara keteraturan struktural dan kompleksitas pemecahan masalah. Kebaruan utamanya adalah upaya menghidupkan simetri ini dari sekadar konsep statis menjadi kerangka analitis yang dinamis dan aplikatif. Matriks *centrosymmetric* merupakan salah satu matriks yang memiliki struktur simetri pada pertengahan matrik (Rasmawati et al., 2021). Diberikan $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n} \in R^{n\times n}$ adalah matriks *centrosymmetric*, jika $a_{ij} = a_{n-i+1,n-j+1}, 1 \le i \le n, 1 \le j \le n$ atau dapat ditulis.

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2n} & \dots & a_{22} & a_{21} \\ a_{1n} & \dots & a_{12} & a_{11} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Penelitian mengenai matriks *centrosymmetric* dengan bentuk khusus membuka peluang untuk mengidentifikasi pola atau merumuskan bentuk umum dari nilai determinannya, khususnya ketika matriks tersebut memiliki orde tertentu dan dipangkatkan dengan bilangan bulat positif. Kajian ini memiliki nilai penting karena dapat memperluas wawasan dalam teori matriks melalui penemuan hubungan antara struktur elemen, pangkat bilangan, dan nilai determinan yang dihasilkan. Selain itu, hasil penelitian ini juga dapat menjadi landasan dalam pengembangan konsep-konsep lanjutan pada aljabar linear serta penerapannya dalam bidang komputasi. Selain mendalami tentang berbagai jenis matriks, pada aljabar matriks terdapat berbagai macam operasi matriks di antaranya yaitu, perkalian matriks, perpangkatan matriks, invers matriks dan determinan matriks. Dalam penelitian ini hanya membahas mengenai determinan matriks (Rasmawati et al., 2021). Banyak cara yang dapat dilakukan dalam menentukan determinan matriks, di antaranya aturan Sarrus, metode kofaktor, reduksi baris, metode kondensasi Chio, dan metode Salihu (Sari, 2020).

Beberapa penelitian sebelumnya telah membahas konsep dan penerapan determinan matriks dalam berbagai konteks matematika. Pada penelitian (Aryani & Marzuki, 2018) membahas determinan matriks Toeplitz bentuk khusus melalui pendekatan ekspansi kofaktor. Matriks yang dijadikan objek penelitian dapat dituliskan sebagai berikut:

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1/_a & 1/_a & 1/_a & 1/_a & \dots & 1/_a \\ a & 0 & 1/_a & 1/_a & 1/_a & \dots & 1/_a \\ a & a & 0 & 1/_a & 1/_a & \dots & 1/_a \\ a & a & a & 0 & 1/_a & \dots & 1/_a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 1/_a \\ a & a & a & a & a & \dots & 0 \end{bmatrix} \text{dengan } a \neq 0, a \in R$$

diperoleh hasil determinannya yaitu:

$$|A_n| = \begin{cases} 0, \text{jika } n \equiv 6 \ (mod\ 2) \text{ atau } n = 6 (mod\ 5) \\ 1 \text{ , jika } n \equiv 6 \ (mod\ 0) \text{atau } n = 6 \ (mod\ 1) \\ -1, \text{jika } n \equiv 6 (mod\ 3) \text{atau } n = 6 \ (mod\ 4) \end{cases}$$

Penelitian (Rahma & Jauza, 2020) mengenai determinan matriks *centrosymmetric* bentuk khusus ordo 3×3 berpangkat bilangan bulat positif dengan kofaktor telah dilakukan, dan bentuk matriksnya dapat dituliskan sebagai berikut:

$$A_3 = \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & a & a \end{bmatrix}$$

dengan determinannya $|A_3^n| = a^{3n}$.

Penelitian (Rahma et al., 2021) memfokuskan pembahasan pada determinan matriks *centrosymmetric* bentuk khusus berordo 4×4. Adapun bentuk matriks yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

$$A_4 = \begin{bmatrix} a & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & a \end{bmatrix} \text{dengan } a \in R$$

Hasil penelitian tersebut menunjukkan bahwa bentuk umum determinan matriks *centrosymmetric* bentuk khussus tersebut adalah sebagai berikut:

$$|A_4^n| = \begin{cases} -a^{4n}, \text{untuk } n \text{ ganjil.} \\ a^{4n}, \text{untuk } n \text{ genap.} \end{cases}$$

Berdasarkan Persamaan (1), pada penelitian ini penulis memfokuskan pembahasan pada determinan matriks *centrosymmetric* dengan bentuk khusus berordo 4×4, di mana elemen memiliki nilai a yaitu a_{11} dan a_{44}, sedangkan elemen bernilai b yaitu a_{14}, a_{22}, a_{33}, a_{41} dan elemen 0 pada entri-entri lainnya. Matriks tersebut selanjutnya dapat direpresentasikan sebagai berikut:

$$A_4 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \tag{2}$$

Penelitian ini akan menjelaskan bagaimana menentukan bentuk umum dari determinan matriks *centrosymmetric* bentuk khusus pada Persamaan (2) yang dipangkatkan dengan bilangan bulat positif. Penelitian dibatasi dengan menggunakan metode ekspansi kofaktor untuk memperoleh bentuk umum determinan. Tujuan penelitian ini adalah menemukan rumus atau pola umum determinan matriks *centrosymmetric* bentuk khusus pada Persamaan (2). Penelitian ini diharapkan meningkatkan pemahaman mengenai determinan matriks serta menjadi referensi bagi penelitian selanjutnya mengenai matriks dengan bentuk khusus.

2. METODE DAN BAHAN PENELITIAN

Metode Penelitian yang digunakan adalah studi literatur dengan menggunakan referensi seperti buku referensi, artikel maupun penelitian-penelitian terkait. Adapun teori pendukung yang penulis gunakan adalah sebagai berikut.

Definisi 2.1 (Saragih & others, 2015)Matriks *centrosymmetric* merupakan salah satu matriks yang memiliki struktur simetri pada pertengahan matriks.
Diberikan $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n} \in R^{n\times n}$ adalah matriks *centrosymmetric*, jika $a_{ij} = a_{n-i+1,n-j+1}$, $1 \leq i \leq n$ atau dapat ditulis

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2n} & \dots & a_{22} & a_{21} \\ a_{1n} & \dots & a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Contoh 2.1

Diberikan matriks A yang merupakan $n \times n$ dengan ordo 4×4 dengann bentuk khusus sebagai berikut:

$$A_4 = \begin{bmatrix} a & b & a & b \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ b & a & b & a \end{bmatrix}$$

matriks A_4 tersebut memenuhi untuk $a_{ij} = a_{n-i+1,n-j+1}$, $1 \leq i,j \leq n$.

Selanjutnya dijelaskan definisi perpangkatan matriks dan definisi minor kofaktor serta determinan matriks sebagai berikut.

Definisi 2.2 (Anton, 2013) Jika A adalah matriks persegi, maka perpangkatan bilangan bulat non-negatif dari A didefinisikan sebagai:

$$A^0 = I \ dan \ A^n = AA \dots A \ [\text{sebanyak}\ n\ faktor]$$

dan jika A *invertible*, maka perpangkatan bilangan bulat negatif dari A didefinisikan sebagai:

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = A^{-1}A^{-1} \dots A^{-1} [\text{sebanyak}\ n\ faktor].$$

Definisi 2.3 (Anton, 2013) Jika A adalah matriks persegi, maka minor dari entri a_{ij} dinotasikan oleh M_{ij} dan didefinisikan menjadi determinan dari sub-matriks yang tetap setelah baris ke-i dan kolam ke-j dihapus dari A. Bilangan $(-1)^{i+j}M_{ij}$ dinotasikan oleh C_{ij} dan disebut kofaktor dari entri a_{ij}.

Definisi 2.4 Jika A adalah matriks berukuran $n \times n$, maka bilangan yang dihasilkan dari perkalian entri-entri di setiap baris atau kolom A oleh kofaktor yang bersesuaian lalu menjumlahkan hasil perkalian tersebut dikatakan determinan A. Jumlah-jumlah dari keseluruhannya disebut ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-j:

$$de\,t(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

Ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-i:

$$de\,t(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}\ .$$

Selanjutnya dijelaskan juga mengenai induksi matematika yang digunakan untuk membuktikan suatu rumusan yang berkaitan dengan proposisi perihal bilangan bulat positif.

Definisi 2.5 (Munir, 2010) Misalkan $p(n)$ adalah proposisi perihal bilangan bulat positif dan kita ingin membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n. Untuk membuktikan proposisi ini, kita hanya perlu menunjukkan: $\mathrm{p}(1)$ benar, dan Jika diasumsikan $p(n)$ benar, maka $p(n+1)$ juga benar untuk setiap $n \geq 1$. Sehingga $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n. Langkah 1 dinamakan basis induksi, sedangkan langkah 2 dinamakan langkah induksi. Langkah induksi berisi asumsi (andaian) yang menyatakan bahwa $p(n)$ benar. Asumsi tersebut dinamakan hipotesis induksi. Bila sudah menunjukkan kedua langkah tersebut benar maka itu artinya sudah membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n.

Contoh 2.2

Diberikan matriks *centrosymmetric* bentuk khusus $A = \begin{bmatrix} a & a & a & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & a & a & a \end{bmatrix}$. Tunjukkan bahwa:

$$A_4^m = \begin{bmatrix} a^m & ma^m & ma^m & 0 \\ 0 & a^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^m & 0 \\ 0 & ma^m & ma^m & a^m \end{bmatrix} \forall\, m \in Z^+$$

Penyelesaian:

Dimisalkan: $p(m): A_4^m = \begin{bmatrix} a^m & ma^m & ma^m & 0 \\ 0 & a^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^m & 0 \\ 0 & ma^m & ma^m & a^m \end{bmatrix} \forall m \in Z^+$

Basis induksi akan dibuktikan $p(1)$ benar

$$p(1): A_4 = \begin{bmatrix} a & a & a & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & a & a & a \end{bmatrix}$$

Jadi $p(1)$ terbukti benar.
Langkah induksi dengan mengasumsikan $p(k)$ benar, yaitu:

$$p(k): A_4^k = \begin{bmatrix} a^k & ka^k & ka^k & 0 \\ 0 & a^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^k & 0 \\ 0 & ka^k & ka^k & a^k \end{bmatrix}$$

Maka ditunjukan untuk $m = k + 1$,$p(k + 1)$ juga benar yaitu:

$$p(k+1): A_4^{k+1} = \begin{bmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^{k+1} & (k+1)a^{k+1} & 0 \\ 0 & a^{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^{k+1} & 0 \\ 0 & (k+1)a^{k+1} & (k+1)a^{k+1} & a^{k+1} \end{bmatrix}$$

Pembuktiannya:

$$A_4^{k+1} = A^k.A = \begin{bmatrix} a^k & (ka)^k & (ka)^k & 0 \\ 0 & a^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^k & 0 \\ 0 & ka^k & ka^k & a^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & a & a & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & a & a & a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^{\mathrm{k}.+1} & (k+1)a^{\mathrm{k}+1} & (k+1)a^{\mathrm{k}+1} & 0 \\ 0 & a^{\mathrm{k}+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^{\mathrm{k}+1} & 0 \\ 0 & (k+1)a^{\mathrm{k}+1} & (k+1)a^{\mathrm{k}+1} & a^{\mathrm{k}} \end{bmatrix}$$

Jadi, $p(k + 1)$ juga benar.
Oleh karena, basis induksi dan Langkah induksi terpenuhi, maka terbukti

$$A_4^m = \begin{bmatrix} a^m & ma^m & ma^m & 0 \\ 0 & a^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^m & 0 \\ 0 & ma^m & ma^m & a^m \end{bmatrix} \forall\, m \in Z^+. \blacksquare$$

Adapun langkah-langkah dalam penelitian ini yaitu :

Penelitian ini diawali dengan diberikannya matriks *centrosymmetric* bentuk umum ordo 4×4 pada Persamaan (2). Selanjutnya menghitung nilai perpangkatan matriks *centrosymmetric* A_4^m untuk $2 \leq m \leq 10$. Dari pola yang teramati, kemudian diduga suatu bentuk umum dari A_4^m. Bentuk umum ini kemudian dibuktikan kebenarannya secara matematis menggunakan induksi matematika, dengan menganalisis pola rekursif yang muncul untuk setiap $m \in z^+$. Selanjutnya, nilai $|A_4^m|$ditentukan menggunakan metode ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-2. Terakhir, bentuk umum A_4^m beserta nilai dari $|A_4^m|$tersebut diaplikasikan dalam penyelesaian sebuah contoh soal untuk menguji konsistensi dan kegunaan hasil yang diperoleh.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini, untuk memperoleh bentuk umum determinan dari *centrosymmetric* pada persamaan (2), terlebih dahulu dilakukan perhitungan terhadap hasil perpangkatan matriks A_4 dengan bilangan bulat positif m dengan $2 \leq m \leq 10$. Perhitungan ini dimulai dari A_4^2 hingga A_4^{10} sebagai dijelaskan dibawah ini:

$$\begin{aligned} A_4^2 &= A_4.A_4 \\ &= \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^2+b^2 & 0 & 0 & 2ab \\ 0 & b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 & 0 \\ 2ab & 0 & 0 & a^2+b^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Melalui perhitungan yang sama, diperoleh:

$$A_4^3 = \begin{bmatrix} a^3+3ab^2 & 0 & 0 & b^3+3a^2b \\ 0 & b^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^3 & 0 \\ b^3+3a^2b & 0 & 0 & a^3+3ab^2 \end{bmatrix}$$

$$A_4^4 = \begin{bmatrix} a^4+b^4+6a^2b^2 & 0 & 0 & 4ab^3+4a^3b \\ 0 & b^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^4 & 0 \\ 4ab^3+4a^3b & 0 & 0 & a^4+b^4+6a^2b^2 \end{bmatrix}$$

$$A_4^5 = \begin{bmatrix} a^5+5ab^4+10a^3b^2 & 0 & 0 & b^5+10a^2b^3+5a^4b \\ 0 & b^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^5 & 0 \\ b^5+10a^2b^3+5a^4b & 0 & 0 & a^5+5ab^4+10a^3b^2 \end{bmatrix}$$

$$A_4^6 = \begin{bmatrix} a^6+b^6+15a^2b^4+15a^4b^2 & 0 & 0 & 6ab^5+20a^3b^3+6a^5b \\ 0 & b^6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^6 & 0 \\ 6ab^5+20a^3b^3+6a^5 & 0 & 0 & a^6+b^6+15a^2b^4+15a^4b^2 \end{bmatrix}$$

$$A_4^7 = \begin{bmatrix} a^7+7ab^6+35a^3b^4+21a^5b^2 & 0 & 0 & b^7+21a^2b^5+35a^4b^3+7a^6b \\ 0 & b^7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^7 & 0 \\ b^7+21a^2b^5+35a^4b^3+7a^6b & 0 & 0 & a^7+7ab^6+35a^3b^4+21a^5b^2 \end{bmatrix}$$

$$A_4^8 = \begin{bmatrix} a^8+b^8+28a^2b^6+70a^4b^4+28a^2b^2 & 0 & 0 & 8ab^7+56a^3b^5+56a^5b^3+8a^7b \\ 0 & b^8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^8 & 0 \\ 8ab^7+56a^3b^5+56a^5b^3+8a^7b & 0 & 0 & a^8+b^8+28a^2b^6+70a^4b^4+28a^2b^2 \end{bmatrix}$$

$$A_4^9 = \begin{bmatrix} a^9 + 9ab^8 + 84a^3b^6 + 126a^5b^4 + 36a^7b^2 & 0 & 0 & b^9 + 36a^2b^7 + 126a^4b^5 + 84a^6b^3 + 9a^8b \\ 0 & b^9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^9 & 0 \\ b^9 + 36a^2b^7 + 126a^4b^5 + 84a^6b^3 + 9a^8b & 0 & 0 & a^9 + 9ab^8 + 84a^3b^6 + 126a^5b^4 + 36a^7b^2 \end{bmatrix}$$

$$A_4^{10} = \begin{bmatrix} a^{10} + b^{10} + 45a^2b^8 + 210a^4b^6 + 210a^6b^4 + 45a^8b^2 & 0 & 0 & 10ab^9 + 120a^3b^7 + 252a^5b^5 + 120a^7b^3 + 10a^9b \\ 0 & b^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^{10} & 0 \\ 10ab^9 + 120a^3b^7 + 252a^5b^5 + 120a^7b^3 + 10a^9b & 0 & 0 & a^{10} + b^{10} + 45a^2b^8 + 210a^4b^6 + 210a^6b^4 + 45a^8b^2 \end{bmatrix}$$

Berikutnya bentuk umum matriks berpangkat A_4^m untuk $m \in Z^+$ dinyatakan dalam Teorema 3.1 sebagai berikut:

Teorema 3.1 Jika diberikan $A_4 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \forall\, a, b \in R,$ maka

$$A_4^m = \begin{bmatrix} \frac{(a-b)^m + (a+b)^m}{2} & 0 & 0 & \frac{(a+b)^m - (a-b)^m}{2} \\ 0 & b^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^m & 0 \\ \frac{(a+b)^m - (a-b)^m}{2} & 0 & 0 & \frac{(a-b)^m + (a+b)^m}{2} \end{bmatrix} \forall\, m \in Z^+. \quad (3)$$

Bukti.

Berdasarkan Langkah-langkah di metodologi penelitian di atas, di hitung perpangkatan matriks *centrosymmetric* A_4^m untuk $2 \le m \le 10$. Dari pola yang teramati, kemudian diduga suatu bentuk umum dari A_4^m. Bentuk umum ini kemudian dibuktikan kebenarannya secara matematis menggunakan induksi matematika, dengan menganalisis pola rekursif yang muncul untuk setiap $m \in$ $\in Z^+$.

Untuk mencari entri di $A_4^m = [a_{ij}]$; $i = 1,2,3,4; j = 1,2,3,4$ dilakukan dengan menduga entri a_{11}.

Pada A_4^2 diperoleh $a_{11} = a^2 + b^2$

Pada A_4^3 diperoleh $a_{11} = a^3 3ab^2$

Pada A_4^4 diperoleh $a_{11} = a^4 + b^4 + 6a^2b^2$

Pada A_4^5 diperoleh $a_{11} = a^5 + 5ab^4 + 10a^3b^2$

Pada A_4^6 diperoleh $a_{11} = a^6 + b^6 + 15a^2b^4 + 15a^4b^2$

Pada A_4^7 diperoleh $a_{11} = a^7 + 7ab^6 + 35a^3b^4 + 21a^5b^2$

Pada A_4^8 diperoleh $a_{11} = a^8 + b^8 + 28a^2b^6 + 70a^4b^4 + 28a^2b^2$

Pada A_4^9 diperoleh $a_{11} = a^9 + 9ab^8 + 84a^3b^6 + 126a^5b^4 + 36a^7b^2$

Pada A_4^{10} diperoleh $a_{11} = a^{10} + b^{10} + 45a^2b^8 + 210a^4b^6 + 210a^6b^4 + 45a^8b^2$

Dengan melihat pola rekursifnya, untuk A_4^m diduga entri $a_{11} = a_{44} = \frac{(a-b)^m + (a+b)^m}{2}$.

Selanjutnya meduga entri a_{14} pada matriks A_4^m

Pada A_4^2 diperoleh $a_{14} = 2ab$

Pada A_4^3 diperoleh $a_{14} = b^3 + 3a^2b$

Pada A_4^4 diperoleh $a_{14} = 4ab^3 + 4a^3b$

Pada A_4^5 diperoleh $a_{14} = b^5 + 10a^2b^3 + 5a^4b$

Pada A_4^6 diperoleh $a_{14} = 6ab^5 + 20a^3b^3 + 6a^5b$

Pada A_4^7 diperoleh $a_{14} = b^7 + 21a^2b^5 + 35a^4b^3 + 7a^6b$
Pada A_4^8 diperoleh $a_{14} = 8ab^7 + 56a^3b^5 + 56a^5b^3 + 8a^7b$
Pada A_4^9 diperoleh $a_{14} = b^9 + 36a^2b^7 + 126a^4b^5 + 84a^6b^3 + 9a^8b$
Pada A_4^{10} diperoleh $a_{14} = 10ab^9 + 120a^3b^7 + 252a^5b^5 + 120a^7b^3 + 10a^9b$
Dengan memperhatika pola rekursifnya, untuk A_4^m diduga $a_{14} = a_{41} = \frac{(a+b)^m-(a-b)^m}{2}$. Dengan cara yang sama untuk entri-entri lainnya pada A_4^m , diperoleh hasil terakhir dugaan matriks *centrosymmetric* A_4^m pada Persamaan (3).

Selanjutnya Persamaan (3) dibuktikan menggunakan induksi matematika sebagai berikut:

Misalkan $p(m)$: $A_4^m = \begin{bmatrix} \frac{(a-b)^m+(a+b)^m}{2} & 0 & 0 & \frac{(a+b)^m-(a-b)^m}{2} \\ 0 & b^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^m & 0 \\ \frac{(a+b)^m-(a-b)^m}{2} & 0 & 0 & \frac{(a-b)^m+(a+b)^m}{2} \end{bmatrix} \forall\, m \in Z^+$

Untuk $m = 1$ maka

$$p(1): A_4 = \begin{bmatrix} \frac{(a-b)^1+(a+b)^1}{2} & 0 & 0 & \frac{(a+b)^1-(a-b)^1}{2} \\ 0 & b^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^1 & 0 \\ \frac{(a+b)^1-(a-b)^1}{2} & 0 & 0 & \frac{(a-b)^1+(a+b)^1}{2} \end{bmatrix}$$

$$p(1): A_4 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

Dengan melihat Persamaan (2) maka $p(1)$benar.

Asumsikan untuk $m = k, p(k)$ benar yaitu:

$$p(k): A_4^k = \begin{bmatrix} \frac{(a-b)^k+(a+b)^k}{2} & 0 & 0 & \frac{(a+b)^k-(a-b)^k}{2} \\ 0 & b^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^k & 0 \\ \frac{(a+b)^k-(a-b)^k}{2} & 0 & 0 & \frac{(a-b)^k+(a+b)^k}{2} \end{bmatrix}$$

Maka akan ditunjukkan untuk $m = k + 1, p(k + 1)$ juga benar yaitu:

$$p(k+1): A_4^{k+1} = \begin{bmatrix} \frac{(a-b)^{k+1}+(a+b)^{k+1}}{2} & 0 & 0 & \frac{(a+b)^{k+1}-(a-b)^{k+1}}{2} \\ 0 & b^{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^{k+1} & 0 \\ \frac{(a+b)^{k+1}-(a-b)^{k+1}}{2} & 0 & 0 & \frac{(a-b)^{k+1}+(a+b)^{k+1}}{2} \end{bmatrix}$$

Pembuktiannya:
$A_4^{k+1} = A^k . A$

$$= \begin{bmatrix} \frac{(a-b)^k+(a+b)^k}{2} & 0 & 0 & \frac{(a+b)^k-(a-b)^k}{2} \\ 0 & b^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^k & 0 \\ \frac{(a+b)^k-(a-b)^k}{2} & 0 & 0 & \frac{(a-b)^k+(a+b)^k}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{(a-b)^{k+1}+(a+b)^{k+1}}{2} & 0 & 0 & \frac{(a+b)^{k+1}-(a-b)^{k+1}}{2} \\ 0 & b^{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^{k+1} & 0 \\ \frac{(a+b)^{k+1}-(a-b)^{k+1}}{2} & 0 & 0 & \frac{(a-b)^{k+1}+(a+b)^{k+1}}{2} \end{bmatrix}$$

Maka terbukti untuk $p(k+1)$. Oleh karena itu terbukti

$$A_4^m = \begin{bmatrix} \frac{(a-b)^m+(a+b)^m}{2} & 0 & 0 & \frac{(a+b)^m-(a-b)^m}{2} \\ 0 & b^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^m & 0 \\ \frac{(a+b)^m-(a-b)^m}{2} & 0 & 0 & \frac{(a-b)^m+(a+b)^m}{2} \end{bmatrix} \forall\, m \in Z^+. \qquad \blacksquare$$

Selanjutnya, bentuk umum determinan matriks *centrosymmetric* bentuk khusus Persamaan (2) diberikan dalam Teorema berikut:

Teorema 3.2 Diberikan $A_4 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \forall\, a, b \in R$

maka $|A_4^m| = (a^2b^2 - b^4)^m \;\forall\, m \in Z^+$.

Bukti.

Berdasarkan Teorema 3.1 telah didapatkan bentuk umum $A_4^m \;\forall\, m \in Z^+$. Dari bentuk umum tersebut, dihitung determinan matriks Persamaan (3) menggunakan pembuktian langsung dengan ekspansi kofaktor sepanjang baris kedua sebagai berikut:

$$|A_4^m| = -0 \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{(a+b)^m-(a-b)^m}{2} \\ 0 & b^m & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(a-b)^m+(a+b)^m}{2} \end{vmatrix} + b^m \begin{vmatrix} \frac{(a-b)^m+(a+b)^m}{2} & 0 & \frac{(a+b)^m-(a-b)^m}{2} \\ 0 & b^m & 0 \\ \frac{(a+b)^m-(a-b)^m}{2} & 0 & \frac{(a-b)^m+(a+b)^m}{2} \end{vmatrix} -$$

$$0 \begin{vmatrix} \frac{(a-b)^m+(a+b)^m}{2} & 0 & \frac{(a+b)^m-(a-b)^m}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{(a+b)^m-(a-b)^m}{2} & 0 & \frac{(a-b)^m+(a+b)^m}{2} \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} \frac{(a-b)^m+(a+b)^m}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^m \\ \frac{(a+b)^m-(a-b)^m}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + b^m(a^2b - b^3)^m - 0 + 0$$

$$= (a^2b^2 - b^4)^m$$

Maka terbukti $|A_4^m| = (a^2b^2 - b^4)^m, \forall\, m \in Z^+$. $\blacksquare$

Selanjutnya diberikan aplikasi contoh Soal untuk Teorema 3.1 dan Teorema 3.2 Sebagai berikut.

Contoh 3.1:

Diberikan matriks *centrosymmetric* $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Tentukanlah A_4^7 dan $|A_4^7|$.

Diketahui $a = -1, b = \frac{1}{2}, m = 7.$ Berdasarkan Teorema 3.1 diperoleh

$$A_4^7 = \begin{bmatrix} \frac{(a-b)^m + (a+b)^m}{2} & 0 & 0 & \frac{(a+b)^m - (a-b)^m}{2} \\ 0 & b^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^m & 0 \\ \frac{(a+b)^m - (a-b)^m}{2} & 0 & 0 & \frac{(a-b)^m + (a+b)^m}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\left(-1-\frac{1}{2}\right)^7 + \left(-1+\frac{1}{2}\right)^7}{2} & 0 & 0 & \frac{\left(-1+\frac{1}{2}\right)^7 - \left(-1-\frac{1}{2}\right)^7}{2} \\ 0 & \frac{1}{2}^7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}^7 & 0 \\ \frac{\left(-1+\frac{1}{2}\right)^7 - \left(-1-\frac{1}{2}\right)^7}{2} & 0 & 0 & \frac{\left(-1-\frac{1}{2}\right)^7 + \left(-1+\frac{1}{2}\right)^7}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^7 + \left(-\frac{1}{2}\right)^7}{2} & 0 & 0 & \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^7 - \left(-\frac{3}{2}\right)^7}{2} \\ 0 & \frac{1}{2}^7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}^7 & 0 \\ \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^7 - \left(-\frac{3}{2}\right)^7}{2} & 0 & 0 & \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^7 + \left(-\frac{1}{2}\right)^7}{2} \end{bmatrix}$$

Untuk mencari nilai determinan $|A_4^7|$ diaplikasikan melalui Teorema 3.2 sebagai berikut.

$|A_4^m| = (a^2b^2 - b^4)^m$

$= ((-1)^2(\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^4)^7$

$=(\frac{1}{4} - \frac{1}{16})^7$

$= (\frac{3}{16})^7.$

Temuan ini juga membuka peluang untuk dikembangkan pada ordo matriks yang lebih tinggi serta aplikasinya dalam bidang yang mengandalkan struktur simetri seperti pada matriks *centrosymetric* bentuk khusus ini.

4. KESIMPULAN

Penelitian ini menyajikan hasil temuan mengenai bentuk umum matriks *centrosymmetric* bentuk khusus berordo 4×4 ketika dipangkatkan dengan bilangan bulat positif m, dan kemudian dihitung determinan bentuk umumnya dengan menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang baris kedua. Bentuk umum matriks dan bentuk umum determinan matriks yang terbentuk diaplikasikan pada contoh soal.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. (2013). *Elementary Linear Algebra* (11th ed.). John Wiley & Sons.

Aprianti, N. (2020). *Determinan Matriks Bentuk Khusus Menggunakan Ekspansi Kofaktor*. Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

Aryani, F., & Marzuki, C. C. (2018). Determinan Matriks Toeplitz Bentuk Khusus Menggunakan Ekspansi Kofaktor. *Jurnal Sains Matematika Dan Statistika*, *4*(2), 1–11.

Boma, R. (2025). *Determinan Matriks Centrosymmetric Bentuk Khusus Ordo Genap Berpangkat Bilangan Bulat Positif*. Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

Hidayah, N. (2024). *Determinan Matriks Centrosymmetric Bentuk Khusus Berpangkat Bilangan Bulat Ordo 3x3 dan 4x4*. Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

Munir, R. (2010). *Matematika Diskrit*. Penerbit Informatika.

Nadila, P. (2024). *Determinan Matriks Centrosymmetric Bentuk Khusus Berpangkat Bilangan Bulat Positif Ordo Ganjil*. Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

Nurhidayat, W. (2025). *Determinan Matriks Centrosymmetric Bentuk Khusus Berordo nxn (4<=n<=7) Berpangkat Bilangan Bulat Positif*. Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

Rahma, A. N., & Aqilah, Z. (2021). Determinan Matriks Hankel Bentuk Khusus Ordo n Berpangkat Bilangan Bulat Positif. *Jurnal Sains Matematika Dan Statistika*, *7*(1), 96–104.

Rahma, A. N., Erizona, E., & Rahmawati, R. (2021). Determinan Matriks Centrosymmetric Bentuk Khusus Ordo 4x4 Berpangkat Bilangan Bulat Positif. *Journal of Fundamental Mathematics and Applications (JFMA)*, *4*(1), 7–16. https://doi.org/10.14710/jfma.v4i1.8921

Rahma, A. N., Fitri, T., & Rahmawati, R. (2023). Determinan Matriks RFPrLrRcirc_r (a, a, 0, ..., 0) Ordo n x n (n >= 3) Menggunakan Metode Salihu. *Jurnal Sains Matematika Dan Statistika*, *9*(2), 53–65. https://doi.org/10.24014/jsms.v9i2.21971

Rahma, A. N., & Jauza, S. M. (2020). Determinan Matriks Centrosymmetric Bentuk Khusus Ordo Berpangkat Bilangan Bulat Positif Dengan Kofaktor. *Jurnal Sains Matematika Dan Statistika*, *6*(2), 86–96.

Rasmawati, R., Yahya, L., Nuha, A. R., & Resmawan, R. (2021). Determinan Suatu Matriks Toeplitz

K-Tridiagonal Menggunakan Metode Reduksi Baris dan Ekspansi Kofaktor. *Euler: Jurnal Ilmiah Matematika, Sains Dan Teknologi*, *9*(1), 6–16. https://doi.org/10.34312/euler.v9i1.10354

Saragih, R., & others. (2015). Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika Universitas Diponegoro Tahun 2015 (SNMPM UNDIP 2015). *Prosiding SNMPM UNDIP 2015*.

Sari, W. P. (2020). *Menghitung determinan matriks blok menggunakan ekspansi Laplace dan komplemen Schur* (Skripsi Sarjana, Jurusan Matematika). Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas, Padang.